# アーベル多様体上のベクトル束について(テータ関数とその周辺)

AUTHOR(S):

向井, 茂

数理解析研究所講究録
597巻 1986年 6-53

# アーベル多様体上のベクトル束について

名大理　向井 茂（Shigeru Mukai）

アーベル多様体の上にはどういうベクトル束が存在して、それらはどう分類されるか？　これは一般にむずかしい問題で、完全な解決をみているのはアーベル多様体上の直線束と楕円曲線上のベクトル束のみである。２次元以上のアーベル多様体の上の階数一般のベクトル束に関しては解決されるべき問題が多く残っている。この小論ではアーベル多様体、特にアーベル曲面の上のベクトル束についてどの様に考えていけばよいかという一つの方向に関して述べたいが、その前に少し歴史を振り返っておく。

楕円曲線の上のベクトル束は Atiyah [1]（複素数体上）Oda [19]（任意閉体上）によってなされた。それによると与えられた階数と次数をもつ直既約ベクトル束のモジュライ空間は常にもとの楕円曲線と同型になる。これは種々の方向に拡張されるが（例えば [14] もこの拡張と思える）こ

の事実そのものは楕円曲線に対してだけ成立する非常に特殊なことである。また、ベクトル束の構成、分類方法も考えている多様体が楕円曲線であることに強く依っている。

一方、一般のアーベル多様体の上の特殊な型のベクトル束として Matsushima[6], Morimoto [9] においては基本群の表現から得られるベクトル束やその種々の特徴付けが考えられた。それの一般化として、それに付随した射影束が基本群の表現から得られるようなベクトル束が考察され、Morikawa [8] ではそのようなベクトル束の多くは直線束を複素トーラスの間の同種写像によって順像をとって得られることが示された。上の [19] での楕円曲線上のベクトル束の構成はこの方法が用いられている。

この時点までに登場してくるベクトル束は皆半等質ベクトル束（定義 (5.1)）のカテゴリーにおさまっていた。楕円曲線上のベクトル束は直既約なら常に半等質で、それ故に、それらの分類ができたと言えるが、2次元以上のアーベル多様体の上の階数2以上のベクトル束が半等質であることは非常に特殊なことである。では、半等質でないベクトル束にはどういうものがあってどう分類されるか？ これについての突破口は Umemura [21] [22] の研究ではじめて与えられたと思う。[21] において考察された Picard 束はこの論

文以前にも研究されてきたものであるが、Picard束がその位相的不変量と安定性によって特徴付けられることを示している。[22]において考えられたベクトル束はこの小論の§4で考察するが、それはアーベル曲面上のベクトル束の真に新しい類であった。そこでは、この新しいベクトル束(ここではU-型と呼ぶ)を使って、アーベル多様体上の安定ベクトル束のモジュライ空間の連結成分としてどういう多様体が現われるかについて貴重な具体的な例を与えた。

一方、[13]においては関数のFourier変換の代数幾何的類似として、アーベル多様体上の層(sheaf)のFourier変換が定義された。それは、個々のベクトル束の解析に有効であるだけでなく、アーベル曲面上の全てのベクトル束の分類についての一つの可能性を示唆してくれる([11], [12])。また、[14]においては、アーベル曲面上のベクトル束(より一般に層)のモジュライ空間の既約成分として現われる多様体はシンプレクティック多様体という複素多様体の1つの特別な類に属することが示されている。

この小論ではFourier関手の説明をした後、それを使ってU-型ベクトル束を調べる。アーベル曲面の上では、U-型ベクトル束はそれ程特殊なものではなく、アーベル曲面上の"一般"の安定ベクトル束は本質的にはU-型ベクトル束

を少し一般化したものと思ってさしつかえない。U-型ベクトル束にアーベル曲面のベクトル束の本質的部分が含まれていると思われる。



用語について　局所的に $\mathbb{C}^n \times X \longrightarrow X$ と同型な多様体 $\pi : Y \longrightarrow X$ を $X$ 上のベクトル束と言うが、ここでは局所自由 $\mathcal{O}_X$-加群のことも $X$ 上のベクトル束と呼ぶ。（$\pi$ とその局所切断の全体のなす $\mathcal{O}_X$-加群の層を同一視している。）また、$\mathcal{O}_X$-加群の連接層を単に $X$ 上の層と言う。

## §1 複素トーラスの上の直線束

$g$次元複素ベクトル空間 $V$ をその中の極大格子 $\Gamma \cong \mathbb{Z}^{2g}$ で割ることによって $g$次元複素トーラス $X = V/\Gamma$ が得られる。$\Gamma$ が極大なことより $\Gamma \otimes \mathbb{R} \cong V$。よって標準的な同型

(1.1) $$\Gamma \otimes \mathbb{C} \cong V \oplus \overline{V}$$

が得られる。$X$ 上のベクトル束について考察する前に、先づ直線束について復習しよう。$V \, (\cong \mathbb{C}^g)$ 上の直線束は常に自明なので、$X$ 上の直線束は全て $\mathcal{O}_V^*$ を係数とする群 $\Gamma$ の1-コサイクル $\{e_\gamma(z)\}_{\gamma\in\Gamma}$ を使って書き表わせる。各 $\gamma \in \Gamma$ に対して $e_\gamma(z)$ はいたる所零でない $V$ 上の正則関数でコサイクル条件

(1.2) $$e_{\gamma+\gamma'}(z) = e_\gamma(z+\gamma')\, e_{\gamma'}(z)$$

が全ての $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ に対して成立する。$\{e_\gamma(z)\}$ を使って $\mathbb{C}\times V$ を $\Gamma$ の作用

(1.3) $$\gamma(\alpha, z) = (e_\gamma(z)\alpha,\ z+\gamma) \qquad \gamma\in\Gamma,$$

$(\alpha, z) \in \mathbb{C}\times V$

で割ることによって $X$ 上の直線束

$$L = \mathbb{C}\times V/\Gamma \longrightarrow V/\Gamma = X$$

が得られる。 この対応でもって $X$ 上の直線束の同型類 $\mathrm{Pic}(X)$ は $\Gamma$ のコホモロジー群と一致する。 即ち、

$$(1.4) \qquad \mathrm{Pic}(X) \simeq H^1(\Gamma, \mathcal{O}_V^*)$$

よって、 $X$ 上の直線束は次のコサイクルの正規化定理によって完全に分類される。

定理 (1.5) (Appell-Humbert. 参[17] §2) $\mathcal{O}_V^*$ を係数とする $\Gamma$ の 1-コサイクル $\{e_\gamma(z)\}_{\gamma\in\Gamma}$ に対して次の性質をみたす $H$ と $\alpha$ が一意的に定まる。

1) $H: V\times V \longrightarrow \mathbb{C}$ は $V$ 上のエルミート形式でその虚数部 $E = \mathrm{Im}\, H$ は格子 $\Gamma\times\Gamma$ 上で整数値をとる。

2) $\alpha$ は $\Gamma$ から絶対値 1 の複素数の全体 $\mathbb{C}_1^* = \{w \mid |w|=1\}$ への写像で、全ての $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ に対して

$$\alpha(\gamma+\gamma') = \exp(i\pi E(\gamma,\gamma'))\alpha(\gamma)\alpha(\gamma')$$

をみたす。

3) $\{\alpha(\gamma)\exp(\pi H(z,\gamma) + \frac{\pi}{2}H(\gamma,\gamma))\}_{\gamma\in\Gamma}$ は 2) より 1-コサイクルになるが、それは $\{e_\gamma(z)\}_{\gamma\in\Gamma}$ とコホモロジー同値である。

この定理において、エルミート形式 $H$ は $\{e_\gamma(z)\}_{\gamma\in\Gamma}$ に対応する直線束 $L$ の Chern 類に外ならないことに注意すると、次の完全列が得られる。

(1.6)
$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathrm{Pic}^\circ X \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Pic}\, X \arrow[r, "\text{Chern類}"] \arrow[d, equal] & H^2(X,\mathbb{Z}) & \\
1 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}_1^*) \arrow[r] & \{\mathrm{Data}\,(H,\alpha)\} \arrow[r] & \left\{\begin{array}{l} H: V\times V\to\mathbb{C}\\ \mathrm{Im}(H(\Gamma\times\Gamma))\subset\mathbb{Z}\end{array}\right\} \arrow[r] \arrow[u, hook] & 0
\end{tikzcd}$$

ただし $\mathrm{Pic}^\circ X$ は次の同値な条件をみたす直線束の同型類全体の集合である。

系(1.7) $X$ 上の直線束 $L$ に対して次の3条件は互いに同値である。

1) Chern 類 $c_1(L)\in H^2(X,\mathbb{Z})$ は自明。

2) $L$ は $\Gamma=\pi_1(X)$ の表現 $\alpha:\Gamma\longrightarrow\mathbb{C}_1^*$ より得られる。

3) $L$ は等質である。即ち、$X$ のどんな平行移動 $T_x$, $x\in X$, でも $L$ は不変, $T_x^*L\cong L$。

(1.6)の記述より、$\mathrm{Pic}^\circ X$ は実 $2g$ 次元トーラスであるが、複素トーラスでもあることをみよう。準同型 $\alpha\in\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbb{C}_1^*)$ に対しては常に $\alpha=\exp(2\pi i\beta)|_\Gamma$ をみ

たす線形写像　$f: V \cong \Gamma\otimes\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$　が存在する。$f$ を虚部にもつ複素反線形写像　$l: V \longrightarrow \mathbb{C}$　が一意的に存在する。$\exp 2\pi i \bar{l}$　は $V$ 上の正則関数なので、$\Gamma$ の２つの表現　$\alpha = \exp \pi(l-\bar{l})|_\Gamma$　と　$\exp \pi l|_\Gamma$　は $X$ 上の互いに同型な直線束を定める。よって、$V$ 上の複素反線形写像の全体　$\bar{V}^\vee$　から $\mathrm{Pic}^\circ X$ への写像

$$\begin{array}{ccc}
\bar{V}^\vee = \mathrm{Hom}_{\substack{\mathbb{C}\text{-anti-}\\ \text{linear}}}(V, \mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathrm{Pic}^\circ X \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
l & \longmapsto & \left[\begin{array}{c}\exp \pi l|_\Gamma \text{ の定} \\ \text{める直線束}\end{array}\right]
\end{array}$$

は全射である。これは準同型でこの核は

$$\Gamma^\vee = \left\{\, l \in \bar{V}^\vee \;\middle|\; \text{全ての } \gamma\in\Gamma \text{ に対し } \mathrm{Im}\, l(\gamma) \text{ は整数} \right\}$$

に一致する。$\Gamma^\vee$ は $\Gamma$ の双対加群 $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{Z})$ と同型で $\bar{V}^\vee$ 内の極大格子でもある。よって

$$\mathrm{Pic}^\circ X = \bar{V}^\vee / \Gamma^\vee$$

と表わせる。この同一視でもって $\mathrm{Pic}^\circ X$ を複素トーラスとみなしたものを $X$ の双対複素トーラスと呼び、$\hat{X}$ でもって表わす。$\hat{X}$ の点 $\alpha$ に対応している $X$ 上の直

線束を $P_\alpha$ でもって表わす。構成法より明らかな様に標準的な同型 $\hat{\hat{X}} \cong X$ がある。よって、$X$ の点 $x$ には $\hat{X}$ 上の直線束 $P_x$ が対応している。

複素トーラス $X \times \hat{X}$ は $2g$ 次元複素ベクトル空間 $\tilde{V} = V \oplus \bar{V}^\vee$ をその中の格子 $\tilde{\Gamma} = \Gamma \oplus \Gamma^\vee$ で割ったものである。$\tilde{V}$ 上のエルミート形式 $H$ を

$$H((v,l),(v',l')) = \overline{l'(v)} + l(v') \quad \text{for}$$

$(v,l),(v',l') \in V \oplus \bar{V}^\vee$

で、写像 $\alpha : \tilde{\Gamma} \longrightarrow \mathbb{C}_1^*$ を $\alpha((\gamma,l)) = \exp(-\pi i \operatorname{Im} l(\gamma))$ でもって定義すると、$(H,\alpha)$ は定理 (1.5) の条件 1), 2) をみたし、$\tilde{\Gamma}$ の 1-コサイクルと $X \times \hat{X}$ 上の直線束 $\mathcal{P}$ を定義する。この直線束 $\mathcal{P}$ は全ての $\alpha \in \hat{X}$, $x \in X$ に対して

$$\begin{cases} \mathcal{P}|_{X \times \alpha} \cong P_\alpha \\ \mathcal{P}|_{x \times \hat{X}} \cong P_x \end{cases}$$

をみたす $X \times \hat{X}$ 上の直線束として特徴付けられ、$X \times \hat{X}$ 上の（正規化された）Poincaré 直線束と呼ばれる（§§ 8, 9 [17]）。

## §2 等質ベクトル束とその分類

全ての平行移動 $T_x : X \longrightarrow X$ $(y \longmapsto x+y)$ によって不変 $(T_x^* E \cong E)$ な $X$ 上のベクトル束 $E$ は等質的 (homogeneous) であると言う。等質ベクトル束は複素トーラス上のベクトル束全体の中では非常に特殊な１つの類にすぎないが、その分類結果は Fourier 変換の原始的な場合とみなせる。

複素トーラス $X=V/\Gamma$ の基本群 $\Gamma$ の $GL(r,\mathbb{C})$ への表現が与えられた時、$\mathbb{C}^r \times V$ を $\Gamma$ の作用

$$\gamma(w, v) = (\gamma w,\ v+\gamma) \qquad (w,v)\in \mathbb{C}^r\times V$$

でもって割ることにより $X$ 上のベクトル束

$$E = W\times V/\Gamma \longrightarrow V/\Gamma = X$$

が得られる。これが等質ベクトル束であることは明らかであるが、この逆も成立する。

定理(2.1) (Matsushima[6] Morimoto [9]) 複素トーラスの上の等質ベクトル束は全て上の様に基本群の表現から得られる。

ベクトル空間 $\mathbb{C}^r$ を $\Gamma$ の表現によって $\Gamma$−加群と

みなしたものを $W$ で表わす。 $\Gamma$ は可換群であるから有限個の1次元表現 $f_1, \cdots, f_n \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*)$ があって、$W$ は各 $W_i$ 上では $\Gamma$ の作用が $f_i(\gamma) \times$ (unipotent 行列) となるような直和分解

$$W = \bigoplus_{i=1}^{n} W_i$$

をもつ。

系(2.2) $E$ を $X$ 上の等質ベクトル束とする時、$\mathrm{Pic}^\circ X$ に属する直線束 $P_1, \cdots, P_n$ と基本群の unipotent 表現からくるベクトル束 $U_1, \cdots, U_n$ が存在して $E$ は

$$E \cong \bigoplus_{i=1}^{n} (P_i \otimes U_i)$$

と直和分解される。

この定理を使って等質ベクトル束を分類しよう。それには、上の系より、基本群 $\Gamma$ の unipotent な表現 $f : \Gamma \longrightarrow GL(r, \mathbb{C})$ で得られるベクトル束を分類すればよい。 $f$ が unipotent であることよりその対数 $\log f = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}(1-f)^n$ が一意的に定義できる。

$$\frac{1}{2\pi i}\log f : \Gamma \longrightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$$

は準同型でその像に属する行列は全て巾零で互いに可換である。よって、$\Gamma\otimes\mathbb{C}$ をアーベル Lie 環とみなした時、

$$\Gamma\otimes\mathbb{C} \longrightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$$

は $\mathbb{C}$ 上の Lie 環の巾零表現になっている。この表現を (1.1) の同型で $\bar{V}$ に制限したものを

$$g : \bar{V} \longrightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$$

で表わす。$f$ は $\exp 2\pi i \operatorname{Im} g$ を $\Gamma$ に制限することによって $g$ から復元される。

$\bar{V}$ の底を不定元とする巾級数環を $\mathbb{C}[\![\bar{V}]\!]$ で表わす。$g$ が巾零表現であることより、$g$ によって $\mathbb{C}[\![\bar{V}]\!]$ がベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ に作用する。この作用でもって、$\mathbb{C}^n$ を $\mathbb{C}[\![\bar{V}]\!]$-加群とみなしたものを $M$ で表わす。$R = \mathbb{C}[\![\bar{V}]\!]$ は局所環で $M$ は長さ $n$ の Artin $R$-加群である。双対トーラス $\hat{X}$ の構成法より、$\hat{X}$ の原点における接空間は $\bar{V}^{\vee}$、よって原点における局所環を完備化したものと $R$ は標準的に同型である。よって、$M$ は原点にのみ台 (support) をもつ $\hat{X}$ 上の連接層とみることができる。

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\left\{\begin{array}{l}\text{unipotent 表現}\\ f:\Gamma\longrightarrow GL(n,\mathbb{C})\end{array}\right\}\Big/\!\sim \arrow[r, shift left, "\frac{1}{2\pi i}\log f|_{\bar V}"] \arrow[d, equal] & \left\{\begin{array}{l}\text{nilpotent 表現}\\ g:\bar V\longrightarrow \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})\end{array}\right\} \arrow[l, shift left, "\exp(2\pi i\,\mathrm{Im}(g))|_{\Gamma}"] \arrow[d, equal] \\
 & \left\{\begin{array}{l}\text{長さ } n \text{ の Artin}\\ \mathbb{C}[[\bar V]]\text{-加群}\end{array}\right\} \arrow[d, equal] \\
\left\{\begin{array}{l}\text{unipotent 表現からくる}\\ X\text{ 上の階数 } n \text{ の}\\ \text{ベクトル束}\end{array}\right\} \arrow[r, leftrightarrow] & \left\{\begin{array}{l}\text{原点に台をもつ}\\ \text{長さ } n \text{ の } \hat X \text{ 上}\\ \text{の連接層}\end{array}\right\}
\end{tikzcd}
$$

この対応でもって unipotent 表現からくる $X$ 上のベクトル束と原点に台をもつ $\hat{X}$ 上の連接層の間のカテゴリーの同値が得られる。等質ベクトル束を系(2.2)の様に分解した時、各 $P_i$ に対応する点 $[P_i]\in\hat{X}$ において $U_i$ に対応する $\mathbb{C}[[\bar V]]$-加群 $M_i$ を与えて得られる $\hat{X}$ 上の層 $M=\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ を対応させることにより上のカテゴリーの同値は等質ベクトル束と Artin $\mathcal{O}_X$-加群の間のカテゴリーの同値に拡張される。

$$
\begin{array}{ccc}
\left(\begin{array}{l}\text{unipotent 表現から}\\ \text{くる } X\text{ 上のベクトル束}\end{array}\right) & \longleftrightarrow & (\text{原点に台をもつ層}) \\
\cap & & \cap \\
(\text{等質ベクトル束}) & \longleftrightarrow & (\text{台が有限な層}) \\
\cap & & \cap \\
(X\text{ 上の連接層}) & \longleftrightarrow & (\hat{X}\text{ 上の連接層})
\end{array}
$$

## §3 Fourier 変換

前節でみた $X$ 上の等質ベクトル束と双対トーラス $\hat{X}$ 上の Artin 層の関係がより一般に $X$ 上の連接層と $\hat{X}$ 上の連接層との間に成立するというのが Fourier 変換である。それはベクトル空間上の関数に対して定義される普通の Fourier 変換の代数的類似である。

$V$ を実 $g$ 次元ベクトル空間，その双対ベクトル空間 $V^\vee$ との間の自然な対を

$$( . ) : V \times V^\vee \longrightarrow \mathbb{R}$$

で表わす。 $V$ 上の関数 $f$ に対して，その Fourier 変換 $\hat{f}$ は

$$(3.1) \qquad \hat{f}(\alpha) = \int_V f(v) \exp(2\pi i (v, \alpha))\, dv$$

でもって $V^\vee$ 上の関数として定義される。 Fourier 変換は

$$(3.2) \qquad \hat{\hat{f}}(v) = f(-v)$$

と Plancheral の公式

$$(3.3) \qquad \int_V f(v) \overline{g}(v)\, dv = \int_{V^\vee} \hat{f}(\alpha) \overline{\hat{g}(\alpha)}\, d\alpha$$

をみたし， $V$ 上の 2 乗可積分関数全体のなす Hilbert 空間

$L^2(V)$ と $V^\vee$ 上の $L^2(V^\vee)$ の間の等長変換 (isometry) を与える。

層の Fourier 変換は以上でてきた諸概念に次の置き換えをすることによって定義される。

(3.4)

| 関数の Fourier 変換 | 層の Fourier 変換 |
|---|---|
| ・実ベクトル空間 $V$ | ・複素トーラス $X$ |
| ・双対空間 $V^\vee$ | ・双対トーラス $\hat{X}$ |
| ・関数 $f$ | ・連接層 $F$ |
| ・核関数 $\exp(2\pi i(v,\alpha))$ on $V\times V^\vee$ | ・Poincaré 直線束 $\mathcal{P}$ on $X\times\hat{X}$ |
| ・関数の積分 | ・層のコホモロジー群 |

先づ、複素トーラス $X$ の上の $\mathcal{O}_X$-加群の連接層 $F$ に対して $\hat{X}$ 上の $\mathcal{O}_{\hat{X}}$-加群の連接層 $\mathcal{S}(F)$ を

$$(3.5)\quad \mathcal{S}(F)=\pi_{\hat{X},*}(\pi_X^{*}F\otimes\mathcal{P})$$

でもって定義する。ただし、$\pi_X$, $\pi_{\hat{X}}$ は各々、直積 $X\times\hat{X}$ から第1, 第2因子への射影 (projection) である。また、$\pi_{\hat{X},*}$, $\pi_X^*$ は各々、層の順像、逆像をとる作用を表わす。$\pi_{\hat{X}}: X\times\hat{X}\longrightarrow\hat{X}$ の $\alpha\in\hat{X}$ 上のファイ

バーに $\pi_X^* F \otimes \mathcal{P}$ を制限したものは $F \otimes P_\alpha$ と同型である。よって、下の(高次)順像の底変換定理を $\pi_{\hat{X}}$ と $\mathcal{F} = \pi_X^* F \otimes \mathcal{P}$ に適用することにより、全ての $\alpha \in \hat{X}$ に対して $H^1(X, F \otimes P_\alpha) = 0$ なら $S(F)$ は $\hat{X}$ 上の各点 $\alpha$ の上にファイバー $H^0(X, F \otimes P_\alpha)$ をもつ $\hat{X}$ 上の層であることがわかる。

(3.6)

$$S(F) = \bigcup_{\alpha \in \hat{X}} H^0(X, F \otimes P_\alpha) \times \{\alpha\}$$
$$\downarrow$$
$$\hat{X}$$

$P_\alpha$ は $\Gamma = \pi_1(X)$ の表現 $\exp(2\pi i(\ell, \ ))|_\Gamma$ から得られる $X = V/\Gamma$ 上の直線束

底変換定理(3.7)([EGA III], [17] §5) $f: X \longrightarrow Y$ は noether 概型の間の proper 射で $\mathcal{F}$ は $Y$ 上平坦な $X$ 上の $\mathcal{O}_X$-加群の連接層とする。$f$ の $y \in Y$ 上のファイバーを $X_y$、そこへの $\mathcal{F}$ の制限を $\mathcal{F}_y$ とする。この時、$H^p(X_y, \mathcal{F}_y) = 0$ が全ての $y \in Y$ に対して成立するなら、自然な写像

$$R^{p-1} f_*(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} k(y) \longrightarrow H^{p-1}(X_y, \mathcal{F}_y)$$

は全ての $y \in Y$ に対して同型である。

$\mathcal{S}$ は $\mathcal{O}_X$-加群の連接層のカテゴリーから $\mathcal{O}_{\hat{X}}$-加群の連接層のカテゴリーへの左完全関手でその高次導関手は高次順像を使って

$$R^i\mathcal{S}(F) = R^i\pi_{\hat{X},*}(\pi_X^* F \otimes \mathcal{P})$$

と書き表わせる。

定義(3.8) ある指数 $i_0$ があって全ての $i \neq i_0$ に対して $R^i\mathcal{S}(F)=0$ が成立する時、$F$ は WIT (weak index theorem) が成立すると言う。この $i_0$ を $F$ の指数と呼び $i(F)$ でもって表わす。また、$R^{i_0}\mathcal{S}(F)$ を $F$ の Fourier 変換と呼び $\hat{F}$ でもって表わす。

底変換定理(3.7)を descending induction でくり返し使うことにより、Fourier 変換 $\hat{F} = R^{i_0}\mathcal{S}(F)$ の点 $\alpha \in \hat{X}$ におけるファイバーは $H^{i_0}(X, F \otimes P_\alpha)$ と標準的に同型であることがわかる。

$$\left[\begin{array}{l} \hat{F} = R^{i_0}\mathcal{S}(F) = \displaystyle\bigcup_{\alpha \in \hat{X}} H^{i_0}(X, F \otimes P_\alpha) \times \{\alpha\} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \hat{X} \\ i_0 = i(F) \text{ は } F \text{ の指数} \end{array}\right.$$

注意(3.9) ある $i_0$ があって、全ての $i \neq i_0$ と全ての $\alpha \in \hat{X}$ に対して $H^i(X, F \otimes P_\alpha) = 0$ が成立する時、$F$ は SIT (strong index theorem) が成立すると言う。反変換定理(3.7)より、SIT が成立すれば WIT が成立するが、逆は一般に正しくない。実際、直線束 $L$ に対しては常に WIT が成立するが、SIT が成立するのは、$L$ が非退化、即ち、$L$ の自己交点数 $(L^g) \neq 0$ となることと同値である([17] §16)。

次は(3.2)(3.3)の類似で Fourier 変換の基本定理である。

双対定理(3.10) 複素トーラス $X$ 上の $\mathcal{O}_X$-加群の連接層 $F$ に対し WIT が成立する時、その Fourier 変換 $\hat{F}$ に対しても WIT が成立し、更に次が成立する。

(1) $i(F) + i(\hat{F}) = g \ (= \dim X)$.

(2) $\hat{\hat{F}} \cong (-1_X)^* F$

(3) $\mathcal{O}_X$-加群の連接層 $G$ にも WIT が成立し $i(G) = i(F)$ の時、$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(F, G)$ は $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\hat{X}}}(\hat{F}, \hat{G})$ と標準的に同型である。(より一般には $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_X}(F, G)$ と $\mathrm{Ext}^{i+i(F)-i(G)}_{\mathcal{O}_{\hat{X}}}(\hat{F}, \hat{G})$ との間にいつも標準的な同型がある。)

より精密な双対定理は Fourier 関手 $\mathbf{R}\mathcal{S}$ が $\mathcal{O}_X$－加群の層の導圏 $\mathbb{D}(X)$ と $\mathcal{O}_{\hat{X}}$－加群の層の導圏 $\mathbb{D}(\hat{X})$ との間のカテゴリーの同値を与えるという形で述べられる（[13]）。一般の層 $F$ に対し、その Fourier 変換 $\hat{F}$ は $\hat{X}$ 上の層の複体の同値類として定義される。WIT が成立するのは複体 $\hat{F}$ のコホモロジーが1ヶ所を除いて零で $\hat{X}$ 上の1つの層とみなせる場合に外ならない。よって上の定理は、$\mathbb{D}(X)$, $\mathbb{D}(\hat{X})$ で成立する話を WIT の成立する場合に書き下したものである。例えば、双対定理の (2) は一般の層 $F$ に対しては、次のスペクトル列が存在するという形になる。

$$(3.11) \qquad R^j\mathcal{S}(R^i\mathcal{S}(F)) \Rightarrow \begin{cases} (-1_X)^*F & i+j=g \\ 0 & i+j\neq g \end{cases}$$

例(3.12) 原点 $0\in\hat{X}$ に台をもつ1次元摩天楼層 $k(0)$ には指数 $0$ の WIT が成立し、その Fourier 変換は自明直線束 $\mathcal{O}_X$ である。よって、$\mathcal{O}_X$ には指数 $g$ の WIT が成立し、その Fourier 変換は $k(0)$ に同型である。

前節で示したカテゴリーの同値を上の双対定理を使って証

明し直してみよう。

定義(3.13)　ベクトル束 $U$ は各 $U_i/U_{i-1}$ が自明直線束 $\mathcal{O}_X$ と同型になるようなフィルター

$$0 = U_0 \subset U_1 \subset \cdots \subset U_n = U$$

が存在する時，ベキ単であると言う。

命題(3.14)　$X$ 上の階数 $n$ のベキ単ベクトル束 $U$ の Fourier 変換は原点 $0 \in \hat{X}$ に台をもつ長さ $n$ の Artin 層である。また，逆も正しい。

証明　上の $U$ のフィルターにおいて，例(3.12)より，各 $U_i/U_{i-1}$ に対して指数 $g$ の WIT が成立する。各 $j$ に対して関手 $R^j S$ は加法的であるから，$U$ 自身に対して指数 $g$ の WIT が成立し，その Fourier 変換 $\hat{U}$ はフィルター

$$0 = \hat{U}_0 \subset \hat{U}_1 \subset \cdots \subset \hat{U}_n = \hat{U}$$

をもつ。各 $i$ に対し，$\hat{U}_i/\hat{U}_{i-1} \cong \widehat{U_i/U_{i-1}} \cong k(0)$ が成立するから，$\hat{U}$ は原点 $0$ に台をもつ長さ $n$ の層である。逆も同様である。

証終

この命題より $X$ 上のベキ単ベクトル束と $0$ に台をもつ $\hat{X}$ 上の Artin 層の間のカテゴリーの同値が得られる。

命題(3.15) $X$ 上の等質ベクトル束に対し指数 $g$ の WIT が成立し、その Fourier 変換は $\hat{X}$ の有限個の点の上にのみ台をもつ Artin 層である。また、その逆も正しい。

証明 関数の Fourier 変換の場合に $\widehat{f(v)\exp(2\pi i(\alpha, v))} = \hat{f}(x+\alpha)$ が成立するように、層の場合も Fourier 変換でもって $\otimes P_\alpha$ ($P_\alpha \in \mathrm{Pic}^\circ X$) と平行移動 $T_\alpha^*$ ($\alpha \in \hat{X}$) が交換される。よって、$M$ が有限個の点にしか台をもたないなら常に $M \otimes P \cong M$ だから $M$ の Fourier 変換 $\hat{M}$ は等質ベクトル束である。逆に $E$ を等質ベクトル束としよう。この時、全ての $i$ と全ての $P \in \mathrm{Pic}^\circ \hat{X}$ に対し $R^iS(E) \otimes P \cong R^iS(E)$ が成立する。下で示す補題より、$R^iS(E)$ は有限個の点にのみ台をもつ。特に、$R^jS(R^iS(E))$ は $j \neq 0$ の時零である。よってスペクトル列(3.11)は退化し、

$$S(R^iS(E)) \begin{cases} \cong (-1_X)^* E & i = g \\ = 0 & i \neq g \end{cases}$$

を得る。$S(R^iS(E))$ は $R^iS(E)$ の Fourier 変換であ

るから、双対定理より $i \neq g$ の時 $R^iS(E)=0$。よって等質ベクトル束 $E$ は指数 $g$ の WIT をみたし、その Fourier 変換が有限個の点にのみ台をもつことが示された。

補題 (3.16) 複素トーラス $X$ 上の $\mathcal{O}_X$-加群の連接層 $F$ が全ての $P \in \mathrm{Pic}^\circ X$ に対して $F \otimes P \cong F$ をみたすなら、$F$ は有限個の点の上にのみ台をもつ。

証明 $F$ の台の既約成分を $W \subset X$ とし、$F \otimes \mathcal{O}_W$ をそのねじれ部分で割ってねじれをなくした層を $F_0$ で表わす。$F$ に対する仮定より $F_0 \otimes P \cong F_0$ が全ての $P \in \mathrm{Pic}^\circ X$ に対して成立する。よって最初から $F$ の台 $W$ は既約で $\mathcal{O}_W$-加群としてねじれがないと仮定してよい。$\mathcal{O}_W$-加群としての $F$ の ($W$ の生成点における) 階数を $n$ とする。$F$ の $n$ 次交代テンソル積 $\overset{n}{\wedge} F$ をねじれ部分で割った層を $G$ とすると、自然な同型 $(\overset{n}{\wedge} F) \otimes P^{\otimes n} \cong \overset{n}{\wedge}(F \otimes P)$ と $\mathrm{Pic}\, X$ が可除的 (divisible) であることより、全ての $P \in \mathrm{Pic}^\circ X$ に対して $G \otimes P \cong G$ であることがわかる。一方、$G$ は階数 1 でねじれがないことより $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(G, G) \cong \mathcal{O}_W$。よって、全ての $P \in \mathrm{Pic}^\circ X$ に対して

$$P|_W \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(G, G) \otimes P \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(G, G \otimes P)$$
$$\cong \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(G, G) \cong \mathcal{O}_W$$

が得られる。 これは，自然な写像 $\mathrm{Pic}^\circ X \longrightarrow \mathrm{Pic}^\circ W$ が自明であることを示している。 よって，Picard 多様体と Albanese 多様体の双対性より，W が X の中で生成する複素部分トーラスは零次元でないといけない。 即ち，$\dim W = 0$ が従う。

証終

この命題より X 上の等質ベクトル束と $\hat{X}$ 上の Artin 層の間のカテゴリーの同値が定理(2.1)を使わずに証明された。2つの命題より系(2.2)の代数版が得られる。

命題(3.16)([17]) X は勝手な代数的閉体上のアーベル多様体とする。 X 上の等質ベクトル束 E に対し，有限個の等質直線束 $P_1, \cdots, P_n \in \mathrm{Pic}^\circ X$ とべき単ベクトル束 $U_1, \cdots, U_n$ が存在し E は直和

$$E \cong \bigoplus_{i=1}^{n} (P_i \otimes U_i)$$

に分解する。 また，べき単ベクトル束は常に等質的である。

## §4 U-型のベクトル束

複素トーラス $X$ 上の直線束 $L$ が

$$\begin{cases} \dim H^0(X, L) = 1 \\ H^i(X, L) = 0 \quad \text{for} \quad i > 0 \end{cases}$$

をみたすとする。この時、$L$ と代数的に同値な直線束 $L \otimes P$ $(P \in \mathrm{Pic}^0 X)$ も同じ性質をもつ。$L$ の代数的同値類を $\ell$ で表わし、対 $(X, \ell)$ は主偏極アーベル多様体であると言われる。曲線の Jacobi 多様体は主偏極アーベル多様体の重要な例である。$\ell$ が主偏極の時、それに属する直線束 $L$ によって定まる準同型

$$\begin{array}{cccc} \phi_L : & X & \longrightarrow & \mathrm{Pic}^0 X \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & x & \longmapsto & [T_x^* L \otimes L^{-1}] \end{array}$$

は同型で $L$ のとり方によらない。この同型でもって $X$ とその双対アーベル多様体 $\hat{X} = \mathrm{Pic}^0 X$ を同一視する。

さて、$\mathrm{Pic}^0 X$ の中から互いに同型でない $n+1$ 個の直線束 $P_0, P_1, \cdots, P_n$ を、そして、$\ell$ に属する直線束 $L$ をとる。各 $i$ に対して零でない準同型写像 $s_i : P_i \to L$（定数倍を除いて一意的）をとり、準同型写像

$$\sum_{i=0}^{n} s_i : \bigoplus_{i=0}^{n} P_i \longrightarrow L$$

を考える。$s_i$ が同型を与えない点 $x \in X$ の集合を $\Theta_i \subset X$ とする時、$\bigcap_{i=0}^{n} \Theta_i = \phi$ なる $\sum_{i=0}^{n} s_i$ は全射である。よって $\sum_{i=0}^{n} s_i$ の核は階数 $n$ のベクトル束（＝局所自由 $\mathcal{O}_X$－加群）になる。このベクトル束の双対は準同型写像

$$(s_0^\vee, \cdots, s_n^\vee) : L^{-1} \longrightarrow \bigoplus_{i=0}^{n} P_i^{-1}$$

の余核と同型である。$\bigcap_{i=0}^{n} \Theta_i \neq \phi$ の時、この準同型写像の余核はベクトル束ではないが、$X$ 上の層（＝$\mathcal{O}_X$-加群の連接層）である。$\bigoplus_{i=0}^{n} P_i^{-1}$ が $X$ 上の等質ベクトル束であることを考慮して、U－型の層を次の様に定義する。

定義(4.1)　$(X, l)$ は主偏極アーベル多様体とする。$-l$ に属する直線束 $L^{-1}$ から等質ベクトル束 $H$ への準同型写像 $f : L^{-1} \longrightarrow H$ が次の条件

(＊) 全ての $P \in \mathrm{Pic}^0 X$ に対して

$$\mathrm{Hom}(f, P) : \mathrm{Hom}(H, P) \longrightarrow \mathrm{Hom}(L^{-1}, P)$$

は単射。

をみたす時，$f$ の余核 $E = \mathrm{Coke}\, f$ は $(X, l)$ 上の U-型の層であると言う。

注意(4.2) 上の条件 (*) は $\mathrm{Hom}(E, P)=0$ が全ての $P \in \mathrm{Pic}^0 X$ に対して成立することと同値である。また、$E$ が単純、即ち、$\mathrm{End}(E) \cong \mathbb{C}$ となることとも同値である([16] §3)。

U-型ベクトル束は [22] において発見され、そこでは次が示された。

定理(4.3)([22]) 勝手な主偏極アーベル曲面 $(X, \ell)$ と整数 $n \geq 2$ に対して、階数 $n$ の U-型ベクトル束で偏極 $\ell$ に関して $\mu$-安定なものが存在する。また、それらのモジュライ空間

$$\left\{\begin{array}{l}\text{階数 } n \text{ の } \mu\text{-安定} \\ \text{な U-型ベクトル束}\end{array}\right\} \Big/ \text{同型}$$

は $\mu$-安定ベクトル束全体のモジュライ空間の開部分集合をなし、直積 $X \times S^{n-1}X$ と双有理同値である。

ただし、ベクトル束 $E$ はそれより真に階数の小さい部分層 $F$ に対して常に $(c_1(F).\ell)/n(F) < (c_1(E).\ell)/n(E)$ が成立する時、$\ell$ に関して $\mu$-安定と言う([20])。また、上で $S^{n-1}X$ は $X$ の $n$ 次対称積を表わす。2つの U-型ベク

トル束 $E = \mathrm{Coke}[L^{-1} \longrightarrow \bigoplus_{i=0}^{n} P_i]$ と $E' = \mathrm{Coke}[L'^{-1} \longrightarrow \bigoplus_{i=0}^{n} P_i']$ が与えられた時、$E \cong E'$ であることと $L \cong L'$ かつ $\bigoplus_{i=0}^{n} P_i \cong \bigoplus_{i=0}^{n} P_i'$、即ち、集合 $\{P_i\}$ と $\{P_i'\}$ が順序を除いて一致することより、モジュライ空間と $X \times S^{n+1}X$ との対応が得られる。ここでは、この事実を Fourier 変換を用いて理解し、その精密化と拡張を与えよう。

U-型の層 $E$ は完全列

$$0 \longrightarrow L^{-1} \xrightarrow{f} H \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

でもって決まる。Serre の双対定理より、$H^i(X, L^{-1} \otimes P)$ は全ての $i \neq g$ と全ての $P \in \mathrm{Pic}^0 X$ に対して零である。よって、$L^{-1}$ と等質ベクトル束 $H$ に対して共に指数 $g$ の WIT が成立し、完全列

$$0 \longrightarrow R^{g-1}S(E) \longrightarrow \widehat{L^{-1}} \xrightarrow{\hat{f}} \hat{H} \longrightarrow R^g S(E) \longrightarrow 0$$

が得られる。定義(4.1)の条件(*)は Serre の双対定理で言い換えると、全ての $P \in \mathrm{Pic}^0 X$ に対して

$$H^g(X, f \otimes P) : H^g(X, L^{-1} \otimes P) \longrightarrow H^g(X, H \otimes P)$$

は全射ということになる。よって上の $\hat{f}$ は全射で、次が得られた。

命題(4.4) U-型の層 $E = \mathrm{Coke}[f : L^{-1} \longrightarrow H]$ に対しては指数 $g-1$ の WIT が成立し、その Fourier 変換 $\hat{E}$ は $\mathrm{Ker}[\hat{f} : \widehat{L^{-1}} \longrightarrow \hat{H}]$ と同型である。

全ての $P \in \mathrm{Pic}^0 X$ に対して $\dim H^g(X, L^{-1} \otimes P) = 1$ であることと底変換定理(3.7)より、$L^{-1}$ の Fourier 変換 $\widehat{L^{-1}}$ は $X$ 上の直線束である。$X \times X (= X \times \hat{X})$ 上の Poincaré 直線束 $\mathcal{P}$ が $m^* L \otimes p_1^* L^{-1} \otimes p_2^* L^{-1}$ と同型であることより、$\widehat{L^{-1}}$ は $\ell$ に属することがわかる。但し、$m$ は $X$ の群演算で、$p_i$ は射影である。一方、$\hat{H}$ は前節でみた様に有限個の点にのみ台をもつ長さ有限の層である。$\hat{f}$ が全射であることより、$\hat{H}$ は $X$ のある0次元部分概型 $Z$ の構造層 $\mathcal{O}_Z$ と同型である。また、$Z$ の定義イデアル(の層)を $\mathcal{I}_Z$ とした時、$\hat{E}$ は $\widehat{L^{-1}} \otimes \mathcal{I}_Z$ と同型になることがわかる。よって、Fourier 変換により次の1対1対応が得られる。

$$\left\{\begin{array}{c}\text{階数 } r \text{ の} \\ U\text{-型の層}\end{array}\right\} \xleftrightarrow[\text{変換}]{\text{Fourier}} \left\{ L \otimes \mathcal{I} \;\middle|\; \begin{array}{l} L \text{ は } \ell \text{ に属し} \\ \mathcal{I} \text{ は長さ } r+1 \\ \text{の0次元部分概型} \\ \text{の定義イデアル} \end{array} \right\}$$

$\dim X \geq 2$ の時は層 $F = L \otimes \mathcal{I}$ からその2重双対

$F^{\vee\vee}$ をとることにより、$L$ が復原され、自然な準同型写像 $F \longrightarrow F^{\vee\vee}$ の余核をとることにより0次元部分概型の構造層 $\mathcal{O}_X/\mathcal{J}$ が復原される。よって、$L\otimes\mathcal{J}$ と $L'\otimes\mathcal{J}'$ が同型になるのは $L\cong L'$ かつ $\mathcal{J}\cong\mathcal{J}'$ の時に限る。

定理(4.5) $\dim X \geq 2$ の時、$(X, \ell)$ 上の階数 $n$ の U-型の層のモジュライ空間は $\mathrm{Pic}^{\ell}(X)\times \mathrm{Hilb}^{n+1}X$ と同型である。但し、$\mathrm{Pic}^{\ell}X$ は $\ell$ に属する直線束のモジュライ空間で $X$ と(非標準的に)同型である。また、$\mathrm{Hilb}^{n+1}X$ は $X$ の長さ $n+1$ の0次元部分概型のモジュライ空間である。

注意(4.6) $\dim X = 2$ の時、0次元部分概型に対してその台である0-サイクルを対応させる写像

$$\mathrm{Hilb}^{n+1}X \longrightarrow S^{n+1}X$$

は双有理射で、対称積 $S^{n+1}X$ の極小非特異化を $\mathrm{Hilb}^{n+1}X$ は与えている([2])。

注意(4.7) $\dim X = 1$ の時、U-型の層のモジュライ空間は $n$ にかかわらず常に $X$ と同型になるが、これは

X上の直既約なベクトル束のモジュライに対して常に成立することである([1])。

複素トーラス X の上の層の族 $\{E_t\}_{t \in T}$ があって $E_0$ が WIT をみたせば、ある $0 \in T$ の近傍があってそのなかの全ての $t \in T$ に対して $E_t$ は $E_0$ と同じ指数の WIT をみたす(Theorem 1.6 [16])。よって、層の変形の族 $\{L \otimes \mathcal{J}\}_{L \in \mathrm{Pic}^l X,\ \mathrm{colength}\ \mathcal{J} = n+1}$ が各点で完備であることより階数 n の U-型層の全体も各点で完備である。即ち、U-型の層の全体は X 上の単純層のモジュライ空間 $Spl_X$ の開部分集合をなす。一方、$\mathrm{Pic}^l X$ と $\mathrm{Hilb}^{n+1} X$ は共にコンパクトであるから U-型の層のモジュライ空間は $Spl_X$ の中の閉部分集合でもある。(但し、$Spl_X$ は Haussdorf的ではないので、連結成分になっているわけではない。)

この様に Fourier 変換を用いてモジュライ空間を解りやすくすることができるが、Fourier 変換の別の応用として U-型層をそのトポロジー的性質と安定性で特徴付けることについて述べる。Fourier 変換のこの使い方は Picard ベクトル束を特徴付ける際に [13] でなされたが、アーベル曲面上のは安定性があると WIT をみたしやすいという事実によっ

ている。主偏極アーベル曲面上のU-型の層は完全列

$$0 \longrightarrow L^{-1} \longrightarrow H \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

より、その第1 Chern類は

$$c_1(E) = c_1(H) - c_1(L^{-1}) = \ell$$

また、その Euler-Poincaré 標数は

$$\chi(E) = \chi(H) - \chi(L^{-1}) = -1$$

をみたす。（Euler-Poincaré 標数 $\chi(E) = \sum(-1)^i \dim H^i(X, E)$ は Riemann-Roch 定理より $E$ の位相的不変量である。）逆に $E$ が $c_1(E) = \ell$, $\chi(E) = -1$ をみたす"一般"な安定層なら、$E$ に対して指数1の WIT が成立することが示せる。あと、その Fourier 変換 $\hat{E}$ にねじれのないことさえ言えば、$\hat{E}$ の Chern 類の計算（§1 [16]）より $\hat{E} \simeq L \otimes J$ となる $L \in \mathrm{Pic}^{\ell} X$ と0次元部分概型のイデアル $J$ が存在することがわかる。Fourier 変換の基本定理より、$E$ はU-型の層であることになる。詳細は [16] にゆずってここでは結果だけを述べておく。主偏極アーベル曲面 $(X, \ell)$ はそのテータ因子が既約か可約かに従って次の2つの型に分かれる。

A) $(X, \ell)$ は種数2のコンパクト Riemann 面の Jacobi 多様体。

B) $X$ は 2 つの楕円曲線 $E_1$, $E_2$ の直積で テータ因子は $(0 \times E_2) + (E_1 \times 0)$ と同値.

A) の場合のうが事情が簡単で $c_1(E) = l$ $\chi(E) = -1$ なる層に対して安定性([3] の意味)と U-型であることは同値になる (Theorem 0.3 [16])。B) の場合には, $c_1(E) = l$, $\chi(E) = -1$ なる安定層のモジュライ空間の中で, U-型でない層は真に次元が小さい部分多様体をなしているにすぎない (Theorem 6.1 [16])。その意味で "一般" の安定層は U-型である。

## §5 U-型ベクトル束の一般化

U-型の層の一般化について考える。U-型の層は直線束 $L^{-1}$ と等質ベクトル束 $H$ を使って準同型写像

$$f: L^{-1} \longrightarrow H$$

の余核として表された。そして、系(2.2)より $H$ は

$$0=H_0\subset H_1\subset\cdots\subset H_r=H$$

なるフィルター付けでもって各 $H_i/H_{i-1}$ が $\mathrm{Pic}^0 X$ に入るものをもつ。また、$L^{-1}$, $H$ は Fourier 変換でもって各々、直線束、長さ有限の層にうつされるが、その Fourier 変換は上の $H$ のフィルター付けの成分に現われる $\mathrm{Pic}^0 X$ 内の直線束の普遍束であるところの Poincaré 直線束 $\mathcal{P}$ を核層として定義される積分関手であることに注意しておく。次に、直線束 $L^{-1}$ も等質ベクトル束 $H$ も次の意味で半等質であることに注意する。

定義(5.1)([10]) 複素トーラス $X$ 上のベクトル束 $E$ は全ての平行移動 $T_x: X\longrightarrow X$, $y\longmapsto y+x$ に対してある直線束 $P$ が存在して $T_x^*E\cong E\otimes P$ となる時、半等質であると言う。(言い換えれば、$E$ に付

随した射影束 $\mathbb{P}(E)$ が等質的であるということになる。)

半等質ベクトル束の例には直線束、等質ベクトル束以外にトーラスの同種写像 $\pi: Y \longrightarrow X$ による $Y$ 上の直線束 $L$ の順像 $\pi_* L$ があるが、逆に、単純な半等質ベクトル束は全てこの様にして得られる([8], [19], [10])。単純半等質ベクトル束は直線束と似た性質をもち、扱いやすいものである。2つの単純半等質ベクトル束 $A$, $A'$ に対して $c_1(A)/r(A)$ と $c_1(A')/r(A')$ が $H^2(X, \mathbb{Q})$ の元として等しい時には $A' \cong A \otimes P$ をみたす直線束 $P \in \mathrm{Pic}^0 X$ が存在する(但し、一意的ではない)。$c_1(A')/r(A') = c_1(A)/r(A)$ をみたす単純半等質ベクトル束 $A'$ の全体は $\hat{X}$ と同種な複素トーラスでパラメトライズされる([10])。また、$c_1(B)/r(B) = c_1(A)/r(A)$ なる半等質ベクトル束 $B$ は常にフィルター付け

$$(5.2) \qquad 0 = B_0 \subset B_1 \subset \cdots \subset B_n = B$$

でもって、各 $B_i/B_{i-1}$ が $A$ と位相的に同値なベクトル束になるものをもつ(系(2.2)の一般化)。直線束に対するコホモロジー群の指数定理(§16 [17])より、半等質ベクトル束に対しても指数定理が成立する。例えば、$c_1(E)$

が非退化なら半等質ベクトル束 $E$ に対して指数 $i_0$ が定まって全ての $i \neq i_0$ に対して $H^i(X, E) = 0$ が成立する。

定義(5.3) $X$ 上の単純半等質ベクトル束 $A, C$ が

$$\begin{cases} \dim \mathrm{Hom}(C, A) = 1 \\ H^i(X, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(C, A)) = 0 & i > 0 \end{cases}$$

をみたすとする。$C$ から $c_1(B)/r(B) = c_1(A)/r(A)$ なる半等質ベクトル束 $B$ への準同型写像 $f : C \longrightarrow B$ が次の条件

(*) $A$ と位相的に同型な単純半等質ベクトル束 $A'$ に対して

$$\mathrm{Hom}(f, A') : \mathrm{Hom}(B, A') \longrightarrow \mathrm{Hom}(C, A')$$

は常に単射。

をみたす時、$f$ の余核 $E = \mathrm{Coker}\, f$ は対 $(C, A)$ に付随した(一般化された)U-型の層であると言う。

一般化されたU-型の層のモジュライを調べるには一般化されたFourier変換を使う。上の定義の $A$ と位相的に同型な単純半等質ベクトル束のモジュライ空間を $Y$ とする。

$Y$ は $\hat{X}$ と同種な複素トーラスで、定義における条件 $\chi(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(C, A)) = 1$ より、直積 $X \times Y$ の上には普遍ベクトル束 $\mathcal{A}$ が存在する。単純半等質ベクトル束 $A'$ に対応する $Y$ の点を $[A'] \in Y$ とする時、常に

$$\mathcal{A}|_{X \times [A']} \cong A'$$

が成立している。Fourier 変換を定義する際に使われた Poincaré 直線束 $\mathcal{P}$ の代りにこの $\mathcal{A}$ を使って $X$ 上の層から $Y$ 上の層を対応させる関手

$$(5.4) \qquad F \rightsquigarrow R^i \pi_{Y,*}(\pi_X^* F \otimes \mathcal{A}^\vee)$$

を考え、それに関する WIT を定義 (3.8) と同様に定義する。すると、双対定理の一般化が成立する。即ち、$F$ に対して指数 $i_0$ の WIT が (5.3) に関して成立するなら、$Y$ 上の層 $E = R^{i_0} \pi_{Y,*}(\pi_X^* F \otimes \mathcal{A}^\vee)$ に対して指数 $g - i_0$ の WIT が関手

$$(5.5) \qquad E \rightsquigarrow R^j \pi_{X,*}(\pi_Y^* E \otimes \mathcal{A})$$

に対して成立し、$F \cong R^{g-i_0} \pi_{X,*}(\pi_Y^* E \otimes \mathcal{A})$ が成立する。よって、関手群 (5.4) と (5.5) は互いに他の逆を与えていると言うことができる。この関手群 (5.4) を

単純半等質ベクトル束 $A^{\vee}$ に付随した Fourier 変換と呼ぼう。さて、この Fourier 変換を $(C, A)$ に付随した U-型の層 $E$ に施してみる。完全列

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} B \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

に (5.4) を施す。定義 (5.3) の仮定より、$C$ に対しては指数 $g$ の WIT が成立し、その（一般化された）Fourier 変換は底変換定理 (3.7) より直線束になる。また、フィルター (5.2) の存在より、$B$ の Fourier 変換は $Y$ 上の長さ有限の層になることがわかる。よって、定義 (5.3) の条件 (*) より、$f$ の Fourier 変換は全射となり、$E$ には指数 $g-1$ の WIT が成立する。また、その Fourier 変換は直線束と0次元部分概型のイデアルのテンソル積と同型である。この様に、議論はもともとの U-型の層と殆んど同じである。一般化された U-型の層とは $L \otimes \mathcal{I}$ （$L$ は直線束、$\mathcal{I}$ は 0 次元部分概型のイデアル）に一般化された Fourier 変換を施したものと言える。それらのモジュライ空間は $\hat{Y} \times \mathrm{Hilb}^n Y$ の開部分集合と同型である。但し、$Y$ は $X$ 上の単純半等質ベクトル束のモジュライ空間で、$\hat{X}$ と同種な複素トーラスである。

## §6 アーベル曲面の上のベクトル束

アーベル曲面上のベクトル束およびそのモジュライ空間を考える。その前に、アーベル曲面 $X$ の上の層の Chern 類 Riemann Roch 定理について整理しておこう。$X$ のコホモロジー環 $H^*(X, \mathbb{Z})$ は $H^1(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^4$ で生成される外積代数と同型である。$X$ 上のベクトル束に対してその Chern 類は $H^*(X, \mathbb{Z})$ の偶数次部分 $H^{ev}(X, \mathbb{Z})$ の元として定義される。ベクトル束，より一般に層 $E$ に対して、その Chern 指標 $ch(E)$ も $H^{ev}(X, \mathbb{Z})$ の元である。$X$ の自然な向き付けで、$H^4(X, \mathbb{Z})$ と $\mathbb{Z}$ を同一視した時、$ch(E)$ の $H^4(X, \mathbb{Z})$ 成分 $ch^4(E)$ は $E$ の Euler-Poincaré 標数 $\chi(E) := \sum (-1)^i \dim H^i(X, E)$ と一致する。さて、階数 8 の自由加群 $H^{ev}(X, \mathbb{Z}) = H^0(X, \mathbb{Z}) \oplus H^2(X, \mathbb{Z}) \oplus H^4(X, \mathbb{Z})$ の 2 元 $u = (r, l, \chi)$, $u' = (r', l', \chi')$ に対して

(6.1) $$(u, u') = r\chi' - (l l') + r'\chi$$

でもって $H^{ev}(X, \mathbb{Z})$ の上に内積を入れる。この内積により、Riemann-Roch 定理は $X$ 上の 2 つの層 $E, F$ において

$$(6.2)\qquad \chi(E,F) := \sum_i (-1)^i \dim \mathrm{Ext}^i(E,F) = (ch(E), ch(F))$$

と書き表わせる。 $E$ がベクトル束の時は、$\chi(E,F)$ は $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(E,F)$ の Euler-Poincaré 標数に外ならない。層 $E$ の無限小変形が $\mathrm{Ext}^1(E,E)$ でパラメトライズされることと単純層のモジュライ空間 $Spl_X$ が非特異であること（[14]）より、次が得られる。

命題(6.3) $X$ 上の単純層 $E$ に対して、$Spl_X$ の点 $[E]$ での接空間は $\mathrm{Ext}^1(E,E)$ と標準的に同型でそこでの次元は

$$\dim_{[E]} Spl_X = (ch(E)^2) + 2$$

で与えられる。

平行移動 $T_x$ と $\otimes P$ $(P \in \mathrm{Pic}^0 X)$ でもって $X \times \hat{X}$ が $Spl_X$ に作用するため $Spl_X$ はいたる所で2次元以上である。よって、単純層 $E$ に対して常に

$$(ch(E)^2) \geq 0$$

が成立する。ここで、等号が成立するのは次の3つのいづれかの場合である。

a) $E$ は単純半等質ベクトル束。

b) $X$ は楕円曲線 $C$ を含み、$E$ はその上の単純ベクトル束を $X$ 上の層と思ったもの。

c) $E$ はある点 $x \in X$ に台をもつ1次元摩天楼層 $k(x)$ と同型。

これら a) b) c) のいずれかをみたす層を $X$ 上の単純半等質層と呼ぶ。次の条件

$$(6.4) \quad \begin{cases} \dim \mathrm{Hom}(C, A) = 1 \\ \mathrm{Ext}^i(C, A) = 0 \qquad i = 1, 2 \end{cases}$$

をみたす2つの単純半等質層の対 $(C, A)$ に対してそれに付随した U-型の層が定義 (5.3) と同様に定義される。U-型層 $E$ は完全列

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow B \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

をもち、$B$ は各 $B_i/B_{i-1}$ が単純半等質で $ch(B_i/B_{i-1}) = ch(A)$ となるフィルター

$$0 = B_0 \subset B_1 \subset \cdots \subset B_a = B$$

をもつ。よって、$E$ の Chern 指標は

$$ch(E) = a\, ch(A) - ch(C)$$

でもって与えられる。$A, C$ は半等質なので $(ch(A)^2) = (ch(C)^2) = 0$。また、上の条件 (6.4) と Riemann-Roch (6.2) より、$(ch(A).ch(C)) = 1$ が得られる。よって、

$m = ch(A)$ とする時, $ch(E)$ は次をみたす。

$$(ch(E).m) = -1 \quad , \quad (m^2) = 0$$

$m$, $ch(E)$ は Chern 指標だから代数的で、それらは $H^{ev}(X, \mathbb{Z})$ の部分加群 $H^0(X, \mathbb{Z}) \oplus H^{1,1}(X, \mathbb{Z}) \oplus H^4(X, \mathbb{Z})$ に入っている。この部分加群に (6.1) の内積の制限をつけて格子 (lattice) と思ったものを $\tilde{H}^{1,1}(S, \mathbb{Z})$ で表わす。これまでの考察から次がわかった。

(☆) E が一般化された U-型の層ならば $(m^2) = 0$, $(ch(E).m) = -1$ をみたす $m \in \tilde{H}^{1,1}(X, \mathbb{Z})$ が存在する。

この数値的条件と一般安定性だけが U-型の層を規制するのではないかというのが次の予想である。

予想 (6.5) $\tilde{H}^{1,1}(X, \mathbb{Z})$ の元 $v = (r, l, \chi)$ は $r > 0$ と $(v^2) > 0$ をみたすとする。この時, $\tilde{H}^{1,1}(X, \mathbb{Z})$ の元 $m$ で $(v.m) = -1$, $(m^2) = 0$ をみたすものがあれば $ch(E) = v$ なる一般化された U-型の層が存在し, $ch(E) = v$ なる安定層のモジュライ空間 $M(v)$ の一般の元は U-型である。(系として, $M(v)$ はあるアーベル曲面 $Y$ に対して $\hat{Y} \times \mathrm{Hilb}^a Y$ と双有理同値になる。)

上の条件 (☆) がどの程度のものであるかについていくつ

かの例をみよう。

I) $(X, l)$ は主偏極アーベル曲面で $\rho(S)=1$ の場合。

$H^{1,1}(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ でその生成元 $l$ は $(l^2)=2$ をみたす。よって $v=(r, nl, s) \in \tilde{H}^{1,1}(X, \mathbb{Z})$ に対し対称行列 $\begin{pmatrix} r & n \\ n & s \end{pmatrix}$ を対応させた時

$$(v^2) = 2 \det \begin{pmatrix} r & n \\ n & s \end{pmatrix}$$

が常に成り立つ。これは、$v$ に対応させる2次形式

$$Q(x, y) = rx^2 + 2nxy + sy^2$$

の判別式と言っても同等である。この時、予想の中の $v$ に関する条件は2次形式 $Q(x, y)$ が $x^2 - ay^2$ と対等、即ち、

$$\begin{pmatrix} p & q \\ s & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r & n \\ n & s \end{pmatrix}{}^t\begin{pmatrix} p & q \\ s & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -a \end{pmatrix}$$

をみたす $\begin{pmatrix} p & q \\ s & t \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{Z})$ が存在するということと同値である。判別式を決めた時の2元2次形式の同値類は有限（ほぼ2次体の類数）個であるが、その中の主類が $U$-型の層に対応するというのが上の予想である。

II) $X$ は2つの楕円曲線 $C_1$, $C_2$ の直積で $C_1$ と $C_2$ は互いに同種でない場合。

$H^{1,1}(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{\oplus 2}$ で、$C_1$, $C_2$ のコホモロジー類 $l_1, l_2$ がその底をなし $(l_1^2)=(l_2^2)=0$ $(l_1.l_2)=1$ をみたす。よって $\tilde{H}^{1,1}(X, \mathbb{Z})$ の元 $v=(r, n_1l_1+n_2l_2,$

$s$) に行列 $\begin{pmatrix} r & n_1 \\ n_2 & s \end{pmatrix}$ を対応させた時

$$(v^2) = 2 \det \begin{pmatrix} r & n_1 \\ n_2 & s \end{pmatrix}$$

が常に成り立つ。この時，予想の $v$ に関する条件は

$$(a, b) \begin{pmatrix} r & n_1 \\ n_2 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = 1$$

をみたす整数 $a, b, c, d$ が存在することと同値であるが、これは $G.C.D(r, n_1, n_2, s) = 1$，即ち，$v$ が原始的（primitive）なら常にみたされる。

III) $X$ は楕円曲線 $C_1, C_2$ の直積（他には仮定しない）場合。

$H^{1,1}(X, \mathbb{Z})$ の中で $l_1, l_2$ と直交するものの全体を $N$ とすると格子として

$$H^{1,1}(X, \mathbb{Z}) \cong \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \perp N$$

と分解する。$H^0(X, \mathbb{Z})$ と $H^4(X, \mathbb{Z})$ も格子 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を生成するから $\widetilde{H}^{1,1}(X, \mathbb{Z})$ 全体は

$$\widetilde{H}^{1,1}(X, \mathbb{Z}) \cong \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \perp N$$

と分解する。よって，Looijenga-Peters [4] の Theorem 2.4 の証明の Step I，または，Nikulin の primitive embedding theorem [18] より、$\widetilde{H}^{1,1}(X, \mathbb{Z})$ の中の同じ長さの２つのベクトルが共に各々と内積が１になるベクトルをもてば，その２

つのベクトルは $\widetilde{H}^{1,1}(X,\mathbb{Z})$ の等長変換で移り合う。$\widetilde{H}^{1,1}(X,\mathbb{Z})$ の元 $v_0=(1,0,-a)$ には $m_0=(0,0,1)$ が $(v,m)=-1,\ (m^2)=0$ を満足させる。よって上の事実より、$\widetilde{H}^{1,1}(X,\mathbb{Z})$ の元 $v$ に $(v.m)=-1$ となる元 $m\in\widetilde{H}^{1,1}(X,\mathbb{Z})$ が存在すれば、その $m$ として $(m^2)=0$ をみたすものが選べ、予想の条件がみたされる。

この様に予想の $v$ に関する条件はかなり弱い数値的条件である。また、たとえ $v$ が条件をみたさなくてもアーベル曲面 $X$ と $\widetilde{H}^{1,1}(X,\mathbb{Z})$ の元 $v$ の対 $(X,v)$ を変形するということを考えれば、$(X,v)$ の変形の $(X',v')$ で $v'$ が予想の条件をみたすものが $(X,v)$ のまわりに稠密に存在する。一方、$ch(E)=v$ なる安定層のモジュライ空間 $M_X(v)$ は $(X,v)$ の変形に沿って smooth に $M_{X'}(v')$ に変形する（[5],[14]）。よって、$M(v)$ の元 $E$ は U-型でなくても対 $(X,E)$ を変形させれば、それらの中で $E'$ が U-型であるものが $(X,E)$ の回りに稠密にあることを予想は主張している。

まだ、あまり多くの場合に予想は確められていないが、§4 で説明したことは、$(X,l)$ が主偏極アーベル曲面で $v=(n,l,-1)$ の時、予想が正しい事に外ならない。ま

た、$X$が主偏極アーベル曲面で $\rho(X)=1$ で $v$ の長さ $(v^2)$ が小さい時にも予想が正しいことが [11] で示されている。

アーベル曲面の上のベクトル束とK3曲面の上のベクトル束は殆んど平行した話ができて、アーベル曲面上の層のFourier変換の替りに、K3曲面上の層の鏡映変換(reflection functor)を使って $v$-型の層に対応するものが定義される。そして、それに関して(6.5)と同様な予想がなるが、それらに関しては別の機会に述べたい。

# 参考文献


EGA, A. Grothendieck and J. Dieudonné, Élements de géometrié algebrique, Publ. Math. I.H.E.S.

(1) M.F. Atiyah, Vector bundles over an elliptic curve, Proc. London Math. Soc., **7**(1957), 414-452. (1974), 291-346.

(2) J. Fogarty, Algebraic families on an algebraic surface, Amer. J. Math., **90** (1968), 511-521.

(3) D. Gieseker, On the moduli of vector bundles on an algebraic surface, Ann. of Math., **106** (1977), 45-60.

(4) E. Looijenga and C. Peters, Torelli theorems for Kähler K3 surfaces, Compositio Math. **42** (1981), 145-186.

(5) M. Maruyama, Moduli of stable sheaves I, J. Math. Kyoto Univ., **17** (1977), 91-126. II, J. Math. Kyoto Univ., **18** (1978), 557-614.

(6) Y. Matsushima, Fibrés holomorphes sur une tore complexe, Nagoya Math. J., **14** (1959), 1-14.

(7) M. Miyanishi, Some remarks on algebraic homogeneous vector bundles, "Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra in honor of Y. Akizuki", Kinokuniya, Tokyo (1973), 71-93.

(8) H. Morikawa, A note on holomrphic vector bundles over complex tori, Nagoya Math. J., **41** (1971), 101-106.

(9) A. Morimoto, Sur la classification des espaces fibrés vectories holomorphes sur une tore complexe admettant des connexions holomorphes, Nagoya Math. J., **15** (1959), 83-154.

(10) S. Mukai, Semi-homogeneous vector bundles on an abelian variety, J. Math. Kyoto Univ., **18** (1978), 239-272.

(11) 向井茂, Fourier関手とそのアーベル曲面上のベクトル束への応用について, 代数幾何学シンポジウム報告集, 東北大学理, 1979年

(12) ——, アーベル曲面の上のベクトル束の分類について, 数理解析研究所講究録, 409 "代数幾何学の諸問題" (1980), 103–127.

(13) ——, Duality between D(X) and D(X) with its application to Picard sheaves, Nagoya Math. J., **81** (1981), 153-175.

(14) ——, Symplectic structure of the moduli space of sheaves on an abelian or K3 surface, Inv. Math., **77** (1984), 101-116.

(15) ——, On the moduli space of bundles on K3 surfaces I, to appear in Proc. of Intl. Colloq. on Vector Bundles, Tata Inst. Fund. Research, 1984.

(16) ——, Fourier functor and its application to the moduli of bundles on an abelian variety, to appear in "Algebraic Geometry, Sendai, 1985" Adv. Studies in Pure Math., **10**, Kinokuniya and North-Holland, Tokyo and Amsterdum.

(17) D. Mumford, Abelian Varieties, Tata Studies in Math., Oxford Univ. Press (1970).

(18) V.V. Nikulin, Integral symmetric bilinear forms and some of their applications, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser, Mat. **43**: English translation, Math. USSR Izv. **14** (1980), 103-167.

(19) T. Oda, Vector bundles over an elliptic curve, Nagoya Math. J., **43** (1971), 41-71.

(20) F. Takemoto, Stable vector bundles on algebraic surfaces, Nagoya Math. J., **47** (1972), 29-48: II, Nagoya Math. J., **52** (1973), 173-195.

(21) H. Umemura, On a property of symmetric products of a curve of genus 2, Proc. Intl. Symp. on Algebraic Geometry, Kyoto 1977,

Kinokuniya, Tokyo, 709-721.

(22) ———, Moduli space of the stable vector bundles over abelian surfaces, Nagoya Math. J., **77** (1980), 47-60.